Sobre los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$ subreductos de los srl-monoides integrales

Juan Manuel Cornejo[1], Hernán J. San Martín[2] y Valeria A. Sígal[3]

[1]Departamento de Matemática (UNS)

[2,3]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas (UNLP)

[1,2,3] Conicet

Junio 2023

Introducción

Los retículos subresiduados (o sr-retículos) fueron introducidos durante la década de 1970 por Epstein y Horn.

Epstein G. and Horn A., *Logics which are characterized by subresiduated lattices*. Z. Math. Logik Grundlagen Math. 22, 199–210 (1976).

Introducción

Idea de esta charla:

- Recordar la definición de sr-retículo y algunos resultados elementales.
- Generalizar los sr-retículos y estudiar los subreductos de una clase de álgebras.

sr-retículos

Definición

Un *retículo subresiduado* (o sr-retículo) es un par (A, Q), donde A es un retículo distributivo acotado, Q es un subretículo acotado de A y para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto

$$E_{ab} = \{q \in Q : q \wedge a \leq b\},$$

al cual notamos $a \to b$.

sr-retículos

Sea (A, Q) un sr-retículo.

- El par (A, Q) puede ser visto como un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ y $Q = \{a \in A : 1 \rightarrow a = a\} = \{1 \rightarrow a : a \in A\}$.
- Para cada $a, b \in A$ y $q \in Q$, $a \wedge q \leq b$ si y solo si $q \leq a \rightarrow b$.
- Si $A = Q$ entonces $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting.
- Para cada $a, b, c \in A$, si $a \leq b \rightarrow c$ entonces $a \wedge b \leq c$.
- Para cada $a, b \in A$, $a \leq b$ si y solo si $a \rightarrow b = 1$.

Generalizando sr-retículos

Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *Subresiduated lattice ordered commutative monoids*. Accepted in Fuzzy Sets and Systems doi.org/10.1016/j.fss.2022.12.003 (2022).

Definición

Un l-monoide integral es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 1)$ es un retículo con último elemento, $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo y la siguiente condición se satisface:
$(a \vee b) \cdot c = (a \cdot c) \vee (b \cdot c)$.

Definición

Un srl-monoide integral es un par (A, Q) donde A es un l-monoide integral y Q es una subalgebra de A tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$, al cual notamos $a \to b$.

Generalizando sr-retículos

Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *Subresiduated lattice ordered commutative monoids*. Accepted in Fuzzy Sets and Systems doi.org/10.1016/j.fss.2022.12.003 (2022).

Definición

Un l-monoide integral es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 1)$ es un retículo con último elemento, $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo y la siguiente condición se satisface:
$(a \vee b) \cdot c = (a \cdot c) \vee (b \cdot c)$.

Definición

Un srl-monoide integral es un par (A, Q) donde A es un l-monoide integral y Q es una subalgebra de A tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$, al cual notamos $a \to b$.

Generalizando sr-retículos

Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *Subresiduated lattice ordered commutative monoids*. Accepted in Fuzzy Sets and Systems doi.org/10.1016/j.fss.2022.12.003 (2022).

Definición

Un l-monoide integral es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 1)$ es un retículo con último elemento, $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo y la siguiente condición se satisface:
$(a \vee b) \cdot c = (a \cdot c) \vee (b \cdot c)$.

Definición

Un srl-monoide integral es un par (A, Q) donde A es un l-monoide integral y Q es una subalgebra de A tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$, al cual notamos $a \to b$.

srl-monoides integrales

Definición

Un srl-monoide integral es un par (A, Q) donde A es un l-monoide integral y Q es una subalgebra de A tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$, al cual notamos $a \to b$.

Sea (A, Q) un srl-monoide integral.

- El par (A, Q) puede ser visto como un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ y $Q = \{a \in A : 1 \to a = a\} = \{1 \to a : a \in A\}$.
- Para todo $a, b \in A$ y $q \in Q$, $a \cdot q \leq b$ si y solo si $q \leq a \to b$.
- Para todo $a, b \in A$, si $a \leq b \to c$ entonces $a \cdot b \leq c$.
- Si $A = Q$ entonces $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1)$ es un retículo residuado conmutativo.
- Para todo $a, b \in A$, $a \leq b$ si y solo si $1 = a \to b$.

srl-monoides integrales

Definición

Un srl-monoide integral es un par (A, Q) donde A es un l-monoide integral y Q es una subalgebra de A tal que para cada $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto $E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\}$, al cual notamos $a \to b$.

Sea (A, Q) un srl-monoide integral.

- El par (A, Q) puede ser visto como un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 2, 0)$ y $Q = \{a \in A : 1 \to a = a\} = \{1 \to a : a \in A\}$.
- Para todo $a, b \in A$ y $q \in Q$, $a \cdot q \leq b$ si y solo si $q \leq a \to b$.
- Para todo $a, b \in A$, si $a \leq b \to c$ entonces $a \cdot b \leq c$.
- Si $A = Q$ entonces $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 1)$ es un retículo residuado conmutativo.
- Para todo $a, b \in A$, $a \leq b$ si y solo si $1 = a \to b$.

Los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales

Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *On the $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreducts of integral srl-monoids* (preprint, 2022).

Definición

Un srs-monoide es un par (A, Q) el cual satisface las siguientes condiciones:

- A es un álgebra de tipo $\{\wedge, \cdot, 1\}$ tal que es un semiretículo acotado (con respecto a $\wedge$ y 1), un monoide conmutativo (con respecto a $\cdot$ y 1) y la operación binaria $\cdot$ es monótona.
- Q es una subalgebra de A.
- Para todo $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto

$$E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\},$$

el cual notamos $a \to b$.

Los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales

Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *On the $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreducts of integral srl-monoids* (preprint, 2022).

Definición

Un srs-monoide es un par (A, Q) el cual satisface las siguientes condiciones:

- A es un álgebra de tipo $\{\wedge, \cdot, 1\}$ tal que es un semiretículo acotado (con respecto a $\wedge$ y 1), un monoide conmutativo (con respecto a $\cdot$ y 1) y la operación binaria $\cdot$ es monótona.
- Q es una subalgebra de A.
- Para todo $a, b \in A$ existe el máximo del conjunto

$$E_{ab} := \{q \in Q : a \cdot q \leq b\},$$

el cual notamos $a \to b$.

srs-monoides

Sea (A, Q) un srs-monoide.

- El par (A, Q) puede ser visto como un álgebra $(A, \wedge, \cdot, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ y $Q = \{a \in A : 1 \rightarrow a = a\} = \{1 \rightarrow a : a \in A\}$.

srs-monoides

Teorema

La variedad de los srs-monoides coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \to, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales.

¿Cómo puede probarse este teorema?

Para la prueba usamos resultados e ideas de los siguientes trabajos:

Castiglioni J.L., Fernández V., Mallea F. and San Martín H.J., *On subreducts of subresiduated lattices and logic*. arXiv:2211.02963 (2022).

Celani S. *Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication*. Southeast Asian Bull. of Math. 27, 1–10 (2003).

srs-monoides

Teorema

La variedad de los srs-monoides coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales.

¿Cómo puede probarse este teorema?

Para la prueba usamos resultados e ideas de los siguientes trabajos:

- Castiglioni J.L., Fernández V., Mallea F. and San Martín H.J., *On subreducts of subresiduated lattices and logic*. arXiv:2211.02963 (2022).
- Celani S. *Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication*. Southeast Asian Bull. of Math. 27, 1–10 (2003).

srs-monoides

Teorema

La variedad de los srs-monoides coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales.

¿Cómo puede probarse este teorema?

Para la prueba usamos resultados e ideas de los siguientes trabajos:

- Castiglioni J.L., Fernández V., Mallea F. and San Martín H.J., *On subreducts of subresiduated lattices and logic*. arXiv:2211.02963 (2022).
- Celani S. *Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication*. Southeast Asian Bull. of Math. 27, 1–10 (2003).

Idea de la prueba del teorema previo

Definición

Sea A un semiretículo acotado. Notamos Fil(A) al conjunto de filtros de A.

Definición

Si $(X, \leq)$ es un poset entonces X^+ denota el conjunto de crecientes de X.

Idea de la prueba del teorema previo

Definición

Sea A un semiretículo acotado. Notamos Fil(A) al conjunto de filtros de A.

Definición

Si $(X, \leq)$ es un poset entonces X^+ denota el conjunto de crecientes de X.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un semiretículo acotado.

- $(\mathrm{Fil(A)}, \subseteq)$ es un poset.
- $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, \emptyset, \mathrm{Fil(A)})$ es un retículo distributivo acotado.

Celani S. *Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication.* Southeast Asian Bull. of Math. 27, 1–10 (2003).

Existe una operación binaria $*$ definida sobre $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, \emptyset, \mathrm{Fil(A)})$ de modo que $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \mathrm{Fil(A)})$ es un l-monoide integral. La construcción de la operación se realiza a través de una relación ternaria definida sobre los filtros de A.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un semiretículo acotado.

- $(\mathrm{Fil(A)}, \subseteq)$ es un poset.
- $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, \emptyset, \mathrm{Fil(A)})$ es un retículo distributivo acotado.

Celani S. *Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication*. Southeast Asian Bull. of Math. 27, 1–10 (2003).

Existe una operación binaria $*$ definida sobre $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, \emptyset, \mathrm{Fil(A)})$ de modo que $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \mathrm{Fil(A)})$ es un l-monoide integral. La construcción de la operación se realiza a través de una relación ternaria definida sobre los filtros de A.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un srs-monoide.

- $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \mathrm{Fil(A)})$ es un l-monoide integral.
- Para todo $a \in A$ se define

$$\varphi(a) = \{F \in \mathrm{Fil(A)} : a \in F\}.$$

Definimos Q como el subretículo completo de $\mathrm{Fil(A)}^+$ generado por $\varphi(\{1 \to a : a \in A\})$. Se puede probar que Q es cerrado por $*$.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un srs-monoide.

- $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \mathrm{Fil(A)})$ es un l-monoide integral.
- Para todo $a \in A$ se define

$$\varphi(a) = \{F \in \mathrm{Fil(A)} : a \in F\}.$$

Definimos Q como el subretículo completo de $\mathrm{Fil(A)}^+$ generado por $\varphi(\{1 \to a : a \in A\})$. Se puede probar que Q es cerrado por $*$.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un srs-monoide.

- $(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \mathrm{Fil(A)})$ es un l-monoide integral.
- Para todo $a \in A$ se define

$$\varphi(a) = \{F \in \mathrm{Fil(A)} : a \in F\}.$$

  Definimos Q como el subretículo completo de $\mathrm{Fil(A)}^+$ generado por $\varphi(\{1 \to a : a \in A\})$. Se puede probar que Q es cerrado por $*$.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un srs-monoide.

- Para todo $U, V \in \mathrm{Fil(A)}^+$ existe

$$U \Rightarrow V := \max\{W \in Q : U * W \subseteq V\}, \text{ entonces}$$

$$(\mathrm{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \Rightarrow, \emptyset, \mathrm{Fil(A)}) \text{ es un srl-monoide integral.}$$

- La función $\varphi : A \to \mathrm{Fil(A)}^+$ definida como antes es un embedding de srs-monoides.

Idea de la prueba del teorema previo

Sea A un srs-monoide.

- Para todo $U, V \in \text{Fil(A)}^+$ existe

$$U \Rightarrow V := \max\{W \in Q : U * W \subseteq V\}, \text{ entonces}$$

$$(\text{Fil(A)}^+, \cap, \cup, *, \Rightarrow, \emptyset, \text{Fil(A)}) \text{ es un srl-monoide integral.}$$

- La función $\varphi : A \to \text{Fil(A)}^+$ definida como antes es un embedding de srs-monoides.

Idea de la prueba del teorema previo

Teorema

La variedad de los srs-monoides coincide con la clase de los $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los srl-monoides integrales.

Muchas gracias!

Bibliografía

- Castiglioni J.L., Fernández V., Mallea H.F. and San Martín H.J., *On subreducts of subresiduated lattices and logic*. Preprint, arXiv:2211.02963 (2022).
- Celani S.A., *Bounded Distributive Lattices with Fusion and Implication*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 28, 999-1010 (2004).
- Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *Subresiduated lattice ordered commutative monoids*. Fuzzy Sets and Systems (2022).
- Cornejo J.M., San Martín H.J. and Sígal V., *On the* $\{\wedge, \cdot, \rightarrow, 1\}$*-subreducts of integral srl-monoids* (preprint, 2022).
- Epstein G. and Horn A., *Logics wich are characterized by subresiduated lattices*. Z. Math. Logik Grundlagen Math. 22, 199–210 (1976).